

ЛЕКЦИЯ 10

СЫЗЫҚТЫ ТЕНДЕУЛЕР ЖҮЙЕЛЕРІ

§1. Сызықты жүйелердің жалпы қасиеттері

1.1. Қарапайым теңдеулер жүйелердің ең маңызды дербес түрі – сызықты жүйелер болып есептелінеді. Оның скалярлық түрдегі жазылуы төмендегідей болады:

[illegible]

Мұндағы, $p_{ij}(t)$ және $f_i(t)$ функциялары кейбір $\langle a, b \rangle$ аралығында анықталған нақты үздіксіз функциялар деп қарастырылады. Бұл жүйені былайша жазуға да болады:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n p_{ij}(t)x_j + f_i(t), (i=1, \dots, n) \quad (2)$$

Егер $P(t) = (p_{ij}(t))$, $(i=1, \dots, n)$ матрицасын енгізсек, ал x пен f -ты вектор немесе бір бағаналы матрицалар деп қарастырсақ, онда берілген жүйені төмендегідей векторлы-матрицалық түрде жазуға болады:

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + f(t) \quad (3)$$

Бұл қатынасты жүйе деумен қатар (оның векторлық мағынасын ескеріп), бір теңдеу деп те айтуға болады.

Әдетте, $f(t)$ – вектор-функцияны бос мүше деп атайды. Егер осы бос мүше нөлге тең болса, онда (3) жүйенің орнына оның біртектісін аламыз:

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x \quad (4)$$

Бос мүше нөлге тең болмағанда (3) жүйені (4) жүйенің сәйкес біртектісі деп атайды.

Бұл жүйелер үшін Коши есебі мына түрде қойылады: барлық векторлардың ішінен

$$\varphi(t_0) = x^0, t_0 \in \langle a, b \rangle$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын шешімді табу керек. Мұндағы, x^0 - берілген бастапқы вектор.

1.2. Сызықты жүйелердің жалпы қасиеттерін келтірейік:

1⁰. Тәуелсіз айнымалыны үздіксіз дифференциалданатын функция арқылы басқа бір тәуелсіз айнымалымен алмастырғаннан жүйенің сызықтығы өзгермейді.

Шынында да, $t = \varphi(\tau), \varphi'(\tau) \neq 0, \forall \tau \in \langle c, d \rangle$ алмастыруын жасайық. Туындыны жаңа айнымалы арқылы өрнектейік:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{1}{\phi'(\tau)}$$

Осыдан,

$$\frac{1}{\varphi'(\tau)} \cdot \frac{dx}{d\tau} = P[\varphi(\tau)]x + f[\varphi(\tau)]$$

немесе

$$\frac{dx}{d\tau} = P[\varphi(\tau)]\varphi'(\tau)x + f[\varphi(\tau)]\varphi'(\tau)$$

яғни,

$$\frac{dx}{d\tau} = \bar{P}(\tau)x + \bar{f}(\tau) \quad (5)$$

түріндегі жаңа сызықты жүйеге қайта келдік.

2⁰. Белгісіз функцияны сызықты түрлендіргеннен жүйенің сызықтығы өзгермейді.

Шынында да, айталық $x = \alpha(t)y + \beta(t)$ түрінде алмастыру жасалсын. Мұнда $\alpha(t) = (\alpha_{ij})$, $(i, j = 1, \dots, n)$ ерекше емес матрица, яғни оның анықтауышы нөлге тең емес. Осы қатынастан туынды алып берілген жүйенің өзін пайдалансақ, мынандай қатынастар аламыз:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{dy}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}y + \frac{d\beta}{dt}$$

яғни,

$$P(t)[\alpha y + \beta] + f = \alpha \frac{dy}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}y + \frac{d\beta}{dt}$$

Осыдан,

$$\frac{dy}{dt} = \alpha^{-1} \left[P(t)\alpha - \frac{d\alpha}{dt} \right] y + \alpha^{-1} \left[P(t)\beta + f(t) - \frac{d\beta}{dt} \right]$$

немесе

$$\frac{dy}{dt} = \bar{P}(t)y + \bar{f}(t)$$

Мұндағы,

$$\begin{aligned} \bar{P}(t) &= \alpha^{-1} \left[P(t)\alpha - \frac{d\alpha}{dt} \right], \\ \bar{f}(t) &= \alpha^{-1} \left[P(t)\beta + f(t) - \frac{d\beta}{dt} \right] \end{aligned}$$

§2. Біртекті сызықты жүйелер

2.1. Төмендегідей біртекті сызықты тендеулер жүйесін қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x \quad (1)$$

Осы жүйенің шешімдерінің кейбір қасиеттерін келтірейік. Ең алдымен ескеретін жәй – біртекті жүйенің бастапқы Коши есебінің $x(t_0) = 0$ шартын қанағаттандыратын нөлдік $x(t) = 0$ шешімі барлық уақытта бар және ол шешім жалғыз.

Теорема-1. Егер $\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t)$ – вектор-функциялары (1) жүйенің шешімдері болса, олардың кез келген сызықты комбинациясы да сол жүйенің шешімі болады.

Дәлелдеуі. Берілген функциялардың нақты сандар өрісіндегі сызықты комбинациясын алайық:

$$\varphi(t) = \alpha_1 \varphi^1(t) + \dots + \alpha_n \varphi^n(t) \quad (2)$$

Мұндағы, әрбір $\varphi^i(t)$ функциясы үшін

$$\frac{d\varphi^i(t)}{dt} = P(t)\varphi^i(t), \forall t \in \langle a, b \rangle$$

тепе-теңдігі орындалады.

Осыдан,

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(t)}{dt} &= \alpha_1 \frac{d\varphi^1(t)}{dt} + \dots + \alpha_n \frac{d\varphi^n(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \alpha_i P(t)\varphi^i(t) = \\ &= P(t) \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi^i(t) = P(t)\varphi(t), \forall t \in \langle a, b \rangle \end{aligned}$$

Теорема-2. Егер (1) жүйенің комплексты $\varphi(t) = u(t) + iv(t)$ шешімі бар болса, онда оның нақты және жорамал бөліктері өз алдарына (1) жүйенің шешімін береді.

Дәлелдеуі. Шарт бойынша

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} + i \frac{dv(t)}{dt} = P(t)(u(t) + iv(t)) = P(t)u(t) + iP(t)v(t)$$

Осыдан,

$$\frac{du(t)}{dt} = P(t)u(t), \frac{dv(t)}{dt} = P(t)v(t), \forall t \in \langle a, b \rangle \quad (3)$$

Анықтама-1. Егер $\langle a, b \rangle$ аралығында анықталған $\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t)$ функциялары үшін бәрі бірдей нөлге тең емес $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ сандары табылып,

$$\alpha_1 \varphi^1(t) + \dots + \alpha_n \varphi^n(t) = 0, \forall t \in \langle a, b \rangle \quad (4)$$

теңдігі орындалса, онда берілген функциялар жиыны $\langle a, b \rangle$ аралығында сызықты тәуелді деп аталынады, ал (4) теңдік $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ сандарының тек нөлдік мәндерінде ғана орындалса, онда берілген функциялар жиыны $\langle a, b \rangle$ аралығында сызықты тәуелсіз деп аталады.

Ескерту. Егер берілген функциялар жиыны $\langle a, b \rangle$ аралығында сызықты тәуелді болса, онда сол аралыққа жататын кез келген $t_0 \in \langle a, b \rangle$ нүктесінде де тәуелді болады. Кері ұйғарым орындалмайды, өйткені бұл жағдайда $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ сандары t_0 -ға тәуелді болады. Ал егер берілген функциялар жиыны белгілі бір дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімдері болса, онда бір нүктедегі тәуелділік пен тәуелсіздік сәйкес аралықтағы тәуелділік пен тәуелсіздікке эквивалент.

Анықтама-2. Біртекті сызықты жүйенің $\langle a, b \rangle$ аралығында анықталған n сызықты тәуелсіз шешімдер жиынын сол жүйенің осы аралықтағы базисі немесе фундаменталь шешімдер жүйесі деп атайды.

2.2. Айталық, $\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t)$ вектор-функциялары (1) жүйенің шешімдері болсын. Әрбір бағанасы осы векторлардың координаттарынан тұратын төмендегідей матрица құрайық:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Осы матрицаның анықтауышын Вронский анықтауышы немесе вронскиан деп атайды және оны $W(t)$ - деп белгілейді. Сонымен,

түрінде жазылады. Мұнда C - кез келген тұрақты вектор. Бұл қатынастан Коши есебінің шешімін анықтауға болады: (15) бастапқы шартты пайдалансақ,

$$x^0 = \Phi(t_0)C$$

теңдігін аламыз. Осыдан $C^0 = \Phi^{-1}(t_0)x^0$. Сонда

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x^0 \quad (21)$$

түріндегі дербес шешім аламыз. Егер $\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) = K(t, t_0)$ белгілеуін енгізсек, соңғы теңдік былай жазылады:

$$x(t) = K(t, t_0)x^0 \quad (22)$$

Осындағы $K(t, t_0)$ матрицасын Коши матрицасы деп атайды.

Егер соңғы қатынастағы t_0 -ді тұрақталған сан, ал x^0 -ді тұрақталмаған вектор деп есептесек, онда (22) қатынасты жүйенің Коши түріндегі жалпы шешімі деп атайды.

Егер кейбір $t_0 \in \langle a, b \rangle$ нүктесінде $\Phi(t_0) = E$ теңдігі орындалса, онда $\Phi(t)$ матрицасы t_0 нүктесінде қалыпталған (нормаланған) деп аталады. Бұл жағдайда шешім

$$x(t) = \Phi(t)x^0 \quad (23)$$

түрінде жазылады.

Теорема-6. Егер $\Phi(t)$ фундаменталь матрица болса, онда $\Psi(t) = \Phi(t)C$ матрицасы да фундаменталь матрица болады. Мұнда C - тұрақты $(n \times n)$ - өлшемді ерекше емес матрица.

Шынында да,

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = \frac{d(\Phi C)}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}C$$

Ал $\Phi(t)$ матрицасы (18) матрицалық теңдеуді қанағаттандыратындықтан,

$$\frac{d(\Phi C)}{dt} = (P\Phi)C = P(\Phi C)$$

тепе-теңдігін аламыз, яғни $\Psi(t) = \Phi(t)C$ матрицасы да (18) матрицалық теңдеуді қанағаттандырады. Оның үстіне

$$\det \Psi(t) = \det \Phi(t) \cdot \det C \neq 0$$

2.4. Лиувилль формуласын келтірейік.

Алдымен, n -ші ретті анықтауыштың туындысы қалай ашылатынын көрсетейік.

n -ші ретті анықтауыштың туындысы сол анықтауыштың әр бағанасы (немесе әр жатық жолы) кезекпен туындыларымен ауыстырылған n анықтауыштардың қосындысынан тұрады. Осы ереже бойынша вронскианның туындысын ашайық:

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \cdot & & & \\ \Phi_{11} & \dots & \Phi_{1i} & \dots & \Phi_{1n} \\ \dots & & & & \\ \Phi_{j1} & \dots & \Phi_{ji} & \dots & \Phi_{jn} \\ \dots & & & & \\ \cdot & & & & \\ \Phi_{n1} & \dots & \Phi_{ni} & \dots & \Phi_{nn} \end{vmatrix} \quad (24)$$

Мұндағы, φ_{ji} берілген жүйенің шешімі болғандықтан,

$$\dot{\varphi}_{ji}(t) = \sum_{k=1}^n p_{jk}(t)\varphi_{ki}(t), (i, j = 1, \dots, n)$$

Осы өрнектерді анықтауыштың i -нші бағанасына қойсақ, анықтауыштың қасиеттері бойынша, $k = j$ болатын қосындыдан басқа анықтауыштардың бәрі нөлге тең болады, өйткені олардың екі бағанасы өзара пропорционал болады. Сондықтан,

$$\dot{W}(t) = \sum_{j=1}^n p_{jj}(t)W(t)$$

Осыдан

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{tr}P(t)dt} \quad (25)$$

Мұндағы, $\text{tr}P(t) = \sum_{j=1}^n p_{jj}(t)$ - берілген $P(t)$ матрицасының ізі деп аталады.

Осы (25) теңдікті Лиувилль формуласы деп атайды. Бұл формуладан мынандай қорытынды шығады: егер $\langle a, b \rangle$ аралығының бір нүктесінде вронскиан нөлге тең болса, ол бүкіл аралықта нөлге тең болады, ал $\langle a, b \rangle$ аралығының бір нүктесінде нөлге тең болмаса, онда ол бүкіл аралықта нөлге тең болмайды.

2.5. Айталық, $\Phi(t)$ - фундаменталь матрица болсын.

$\Phi^{-1}(t)\Phi(t) = E$ тепе-теңдігін дифференциалдайық:

$$\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}\Phi) = \frac{d\Phi^{-1}}{dt}\Phi + \Phi^{-1}\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

Осыдан

$$\frac{d\Phi^{-1}}{dt} = -\Phi^{-1}\frac{d\Phi}{dt}\Phi^{-1} = -\Phi^{-1}P\Phi\Phi^{-1} = -\Phi^{-1}P$$

немесе

$$\frac{d\Phi^{-1}}{dt} = -\Phi^{-1}P$$

Соңғы қатынастағы матрицаларды аударсақ,

$$\frac{d(\Phi^{-1})^T}{dt} = -P^T(\Phi^{-1})^T$$

теңдігін аламыз. Бұдан шығатын қорытынды, $\Psi(t) = (\Phi^{-1})^T$ матрицасы

$$\frac{dy}{dt} = -P(t)y \quad (27)$$

теңдеуінің фундаменталь матрицасы болатынын көреміз. Осы (27) жүйені берілген (1) жүйенің түйіндесі деп атайды. Егер $\Psi_1(t)$ осы жүйенің кейбір фундаменталь матрицасы болса, онда

$$\Psi_1(t) = (\Phi^{-1})^T C$$

қатынасы орын алады. Мұнда C -ерекше емес матрица. Осыдан

$$\Psi_1^T(t) = C^T \Phi^{-1}$$

немесе

$$\Psi_1^T(t) \Phi(t) = C^T = B$$

Соңғы теңдіктен мынаны көреміз: $\Psi_1^T(t)$ - матрицасының жатық жолы (27) жүйенің шешімдері болатынын, $\Phi(t)$ матрицасының бағаналары (1) жүйенің шешімдері болатыны, ал олардың көбейтіндісі тұрақты екенін көреміз.